Pavel Obdržálek, MAII, úkol č. 1

S použitím Taylorova rozvoje určete hodnotu $\ln(1,1)$ s chybou menší než 10^{-4} (1)

Talorův rozvoj pro $\ln(x)$, $x \in (0,2\rangle$ vypadá takto:

$$\ln(x) = 0 + (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \cdots$$

Potom po dosazení $x = 1,1$ získáváme:

$$\ln(1,1) = 0 + (1,1-1) - \frac{(1,1-1)^2}{2} + \frac{(1,1-1)^3}{3} - \frac{(1,1-1)^4}{4} + \cdots$$

A po vyčíslení dostáváme:

$$\ln(1,1) \approx 0 + 0,1 - 0,005 + 0,000\overline{3} - 0,000025 \approx 0,09531$$

Určete Taylorův polynom řádu $n \in \mathbb{N}$ funkce $f(x) = \dfrac{x}{9+x^2}$ v bodě 0.

Pro která $x \in \mathbb{R}$ tento polynom konverguje k dané funkci f pro $n \to \infty$? (2)

Nejprve si danou funkci trochu přepíšeme:

$$f(x) = \frac{x}{9+x^2} = \frac{x}{9}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2} = \frac{x}{9}\frac{1}{1-\left(-\frac{x}{3}\right)^2}$$

Nyní zasubstituuejme $q = \frac{x}{9}$, $r = \frac{x}{3}$, $s = -r^2$ a získáme:

$$f(x) = q \cdot \frac{1}{1-r}$$

Tento polynom již umíme lehce vytvořit:

$$f(x) = q \cdot \left(1 + s + s^2 + s^3 + \cdots + s^{\frac{n}{2}}\right)$$

Zpětným dosazením za s získáváme (v závislosti na lichosti/sudosti n):

$$f(x) = q \cdot \left(1 - r^2 + r^4 - r^6 + \cdots \pm r^n\right)$$

Dalším dosazením za r dostaneme:

$$f(x) = q \cdot \left(1 - \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{x}{3}\right)^4 - \left(\frac{x}{3}\right)^6 + \cdots \pm \left(\frac{x}{3}\right)^n\right)$$

Po roznásobení q máme výsledek:

$$f(x) = \frac{x}{9} - \frac{x^3}{81} + \frac{x^5}{729} - \frac{x^7}{6561} + \cdots \pm \frac{x}{9} \cdot \left(\frac{x}{3}\right)^n$$

$$\text{Vypočtěte } \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4} \tag{3}$$

Použitím Taylorova rozvoje dostáváme:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \mathcal{O}(x^4)$$

a

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + \mathcal{O}(x^4)$$

To pak dosadíme:

$$\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4} = \frac{\frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + \mathcal{O}(x^4)}{x^4} = \frac{1}{24} - \frac{1}{8} + \mathcal{O}(1) = -\frac{1}{12} + \mathcal{O}(1).$$

Odtud pak:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4} = -\frac{1}{12}$$